

Devoir Maison

Pour le 8 janvier 2024

Problème

(adapté de Ecricome ECS 2018)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie I — Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N , à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0).$$

b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b .
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(N = k) = 0.$$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a .

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1).$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p .

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.

b) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k).$$

c) En déduire que $\left((1-a) \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) \right)_{m \geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.

Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b .

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b .

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie II — Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(N = k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On note $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$ et G la série génératrice de N

5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière G

6. On considère la série entière $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p_{k-1} x^k$ et H sa fonction somme.

(a) Justifier que G et H ont même rayon

(b) Pour $x \in]-R, R[$ déterminer $H'(x)$

7. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$

$$G(x) = p_0 + axG(x) + bH(x)$$

(b) En déduire une équation différentielle linéaire vérifiée par G .

(c) Déterminer une expression explicite de G sur $] -R, R[$.

8. En utilisant G et ses dérivées, retrouver les expressions de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$ obtenues dans la partie I.